

КОРРЕКТНОСТЬ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ*

Р. Р. Тухватуллина¹, С. М. Фролов²

Аннотация: Разработана корректная математическая модель неизоотермического двухскоростного двухтемпературного двухфазного течения в системе «жидкость — пузырьки газа». Модель основана на двухфазных уравнениях Эйлера с введением добавочного давления у поверхности газового пузырька, которое обеспечивает корректность задачи Коши для системы определяющих уравнений с однородными начальными условиями. Добавочное давление определено через осредненный по поверхности раздела фаз местный коэффициент давления для различных чисел Рейнольдса относительного движения фаз. Получены условия применимости модели. Модель проверена на одномерной задаче о распространении ударной волны в воде с пузырьками воздуха с объемным газосодержанием от 0,5% до 30% путем сравнения результатов расчетов с экспериментами. Показано, что модель дает удовлетворительные результаты по скорости распространения ударных волн и по скорости движения газовых пузырьков за ударными волнами в пузырьковой жидкости с объемным газосодержанием выше 2%.

Ключевые слова: двухфазное течение; уравнения Эйлера; корректность задачи Коши; пузырьковая жидкость; ударная волна; сравнение с экспериментом

Введение

Решению проблемы корректности задачи Коши уравнений Эйлера для двухскоростного течения двухфазной смеси с общим давлением фаз посвящено много работ. Некорректность, как правило, связывают с неполным описанием межфазного взаимодействия или взаимодействия между включениями дисперсной фазы. Для регуляризации задачи в [1, 2] предложено вводить разные давления фаз, учитывающие силу поверхностного натяжения на искривленной поверхности раздела фаз. В [3] обсуждается введение дополнительного давления, которое препятствует аномальной концентрации дисперсных частиц. В [4] учитывается добавочное давление

* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России по государственному контракту № 14.609.21.0001 (идентификатор контракта RFMEFI57914X0038) «Разработка технологии создания гидрореактивной тяги в водометных двигателях высокоскоростных водных транспортных средств и создание стендового демонстрационного образца гидрореактивного импульсно-детонационного двигателя» в рамках Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы».

¹ Центр импульсно-детонационного горения, tukhvattullinarr@gmail.com

² Центр импульсно-детонационного горения; Институт химической физики им. Н.Н. Семёнова Российской академии наук; Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», smfrol@chph.ras.ru

у поверхности дисперсной частицы, обусловленное ее движением в сплошной среде. Как правило, у всех подходов, которые позволяют сделать задачу корректной, существует своя область применимости, например в [1] предполагается, что две фазы непрерывные и полностью распределенные, в [4] рассматриваются сферические дисперсные частицы и т. д.

Цель данной работы — разработать корректную математическую модель неизоэтермического двухскоростного двухтемпературного двухфазного течения в системе «жидкость — пузырьки газа» и проверить применимость этой модели к расчетам распространения ударных волн в пузырьковых средах, сравнив результаты расчетов с экспериментальными данными.

Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений, описывающую неизоэтермическое двухскоростное двухтемпературное течение двухфазной смеси «жидкость — пузырьки газа»:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi \rho_g}{\partial t} + \nabla_k (\phi \rho_g u_g^k) &= 0; \\ \frac{\partial (1 - \phi) \rho_l}{\partial t} + \nabla_k ((1 - \phi) \rho_l u_l^k) &= 0; \\ \frac{\partial \phi \rho_g u_g^j}{\partial t} + \nabla_k (\phi \rho_g u_g^k u_g^j) &= -\nabla_j (p_g \phi) + p_l \nabla_j \phi + M_{l,g}^k; \\ \frac{\partial (1 - \phi) \rho_l u_l^j}{\partial t} + \nabla_k ((1 - \phi) \rho_l u_l^k u_l^j) &= -\nabla_j (p_l (1 - \phi)) - p_l \nabla_j \phi + M_{g,l}^k; \\ \frac{\partial \phi \rho_g h_g}{\partial t} + \nabla_k (\phi \rho_g u_g^k h_g) &= \frac{\partial \phi p_g}{\partial t} - p_l \frac{\partial \phi}{\partial t} + H_{l,g}^k; \\ \frac{\partial (1 - \phi) \rho_l h_l}{\partial t} + \nabla_k ((1 - \phi) \rho_l u_l^k h_l) &= \frac{\partial (1 - \phi) p_l}{\partial t} + p_l \frac{\partial \phi}{\partial t} + H_{g,l}^k; \\ p_g &= p_l = p; \\ p_l &= p_l + C_s(\phi) \rho_l \Delta^2, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где t — время; \mathbf{u}_i , ρ_i и p_i — скорость, плотность и давление i -й фазы; ϕ — объемная доля газа (объемное газосодержание); $\Delta^2 = (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g)^2$, $h_i = i_i + \mathbf{u}_i^2/2$ — полная энтальпия i -й фазы; i_i — энтальпия i -й фазы; межфазные источники $M_{g,l}^k = -M_{l,g}^k$ и $H_{g,l}^k = -H_{l,g}^k$ описывают обмен количеством движения и энергии соответственно; $C_s = C_s(\phi)$ — коэффициент (см. ниже); индексы l и g соответствуют жидкости и газу.

Система (1), основанная на предположении о взаимно проникающих континуумах — жидкости и газа, дополняется термическими и калорическими уравнениями состояния жидкости и идеального газа, а также соотношениями для межфазных источников:

$$\left. \begin{aligned} \rho_l &= \rho_l^0; & \rho_g &= \frac{p_g}{R_g T_g}; \\ i_i &= c_{pi}(T_i - T_i^0) + i_i^0; \\ \mathbf{M}_{g,l} &= C_d \frac{A \rho_l (\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l) |\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l|}{8}; \\ \mathbf{H}_{g,l} &= \text{Nu} \kappa_l \frac{A(T_g - T_l)}{d}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где R_g — газовая постоянная; T_i — температура i -й фазы; c_{pi} — теплоемкость i -й фазы; d — диаметр пузырька газа; C_d — коэффициент гидродинамического сопротивления; Nu — число Нуссельта; $A = 6\phi/d$ — площадь поверхности дисперсных частиц в единице объема; κ_l — коэффициент теплопроводности жидкости. В дальнейшем предполагается, что задача по пространству одномерная, и принимается во внимание, что при анализе корректности задачи Коши алгебраические источники не учитываются.

В качестве начальных условий для системы (1) и (2) примем постоянные условия по всем переменным:

$$\mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{w}_0,$$

где $\mathbf{w} = (\phi, p_g, u_g, u_l, h_g, h_l)^T$ — вектор неизвестных, относительно которых решается задача. В отсутствие источников массы, количества движения и энергии при $t > 0$ получим постоянное решение по всем переменным.

Возмутим начальные условия:

$$\mathbf{w}'(x, 0) = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}^\delta \sin(\alpha x)$$

и линеаризуем систему в окрестности постоянного решения \mathbf{w}_0 , пренебрегая величинами второго порядка малости. В итоге получим линейную систему уравнений с постоянными коэффициентами:

$$T \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial t} + X \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial x} = 0.$$

Покажем, что у матрицы $A = T^{-1}X$ все собственные значения вещественные, если выполнены условия:

$$\begin{cases} C_s < -\phi; \\ p_I > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Характеристический многочлен матрицы A имеет два тривиальных корня $\lambda_1 = u_g$ и $\lambda_2 = u_l$, а четыре оставшихся корня удовлетворяют алгебраическому уравнению четвертого порядка:

$$P^{(1)}(\lambda) = P^{(2)}(\lambda). \quad (4)$$

Рассмотрим отдельно многочлены в левой и правой частях (4). Многочлен $P^{(1)}(\lambda)$ имеет вид:

$$P^{(1)}(\lambda) = \rho_g(\lambda - u_g)^2 \left((\phi - 1)\rho_g + \rho_l\phi \frac{\partial \rho_g}{\partial p} ((\lambda - u_l)^2 + C_s\Delta^2) \right)$$

и имеет корни

$$\lambda_{1,2}^{(1)} = u_l \pm \sqrt{D}; \quad \lambda_{3,4}^{(1)} = u_g,$$

где

$$D = \frac{(1 - \phi)\rho_g}{\rho_l\phi\partial\rho_g/\partial p} - C_s\Delta^2$$

и коэффициент при старшей степени равен $a^{(1)} = \rho_g\rho_l\phi\partial\rho_g/\partial p$. При этом, используя выражение $p = \rho_g/(\partial\rho_g/\partial p)$ и условия (3), можно показать, что $u_l - \sqrt{D} < u_g < u_l + \sqrt{D}$.

Многочлен $P^{(2)}(\lambda)$ имеет вид:

$$P^{(2)}(\lambda) = \rho_l \left[(u_g - \lambda) \left(\frac{\partial \rho_g}{\partial u_g} + \frac{\partial \rho_g}{\partial h_g} \lambda \right) + \rho_g \right] (C_s\Delta^2(\lambda - u_l)^2\phi)$$

и имеет два действительных корня

$$\lambda_{1,2}^{(2)} = u_l \pm \sqrt{-\frac{C_s}{\phi} \Delta}$$

и два комплексных корня, так как

$$\left[(u_g - \lambda) \left(\frac{\partial \rho_g}{\partial u_g} + \frac{\partial \rho_g}{\partial h_g} \lambda \right) + \rho_g \right] = \rho_g \left[\frac{1}{i_g}(\lambda - u_g)^2 + 1 \right],$$

причем энтальпия газа $i_g > 0$; коэффициент при старшей степени равен $a^{(2)} = \rho_g\rho_l\phi/i_g$.

Если корни многочлена $P^{(2)}$ располагаются между корнями многочлена $P^{(1)}$, как показано на рис. 1, и многочлен $P^{(1)}$ возрастает быстрее чем $P^{(2)}$, то этого достаточно, чтобы многочлены имели четыре точки пересечения на вещественной плоскости. Следовательно, в этом случае соответствующий характеристический многочлен имеет четыре вещественных корня. Многочлен $P^{(1)}$ возрастает быстрее чем $P^{(2)}$, если

$$a^{(1)} > a^{(2)} \Leftrightarrow \frac{c_{pg}}{R_g} > 1,$$

что всегда выполнено для идеального газа. Расположение корней $\lambda_1^{(1)} < \lambda_1^{(2)} < \lambda_3^{(1)} = \lambda_4^{(1)} < \lambda_2^{(2)} < \lambda_2^{(1)}$ получено из условий (3).

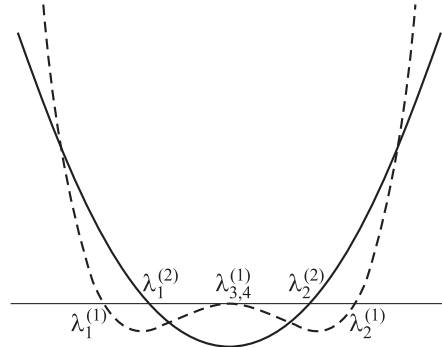


Рис. 1 Графическое представление многочленов $P^{(2)}$ (сплошная кривая) и $P^{(1)}$ (штриховая кривая)

Что такое $C_s(\phi)$?

В [5] получено распределение давления вдоль поверхности шара, движущегося вдоль некоторой оси z со скоростью $\mathbf{U} = U_z e_z$ в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости в отсутствие внешних массовых сил:

$$p_l(\theta) = p_{l,\infty} + \frac{1}{2} \rho_l R \frac{dU_z}{dt} \cos(\theta) + \frac{1}{8} \rho_l U_z^2 (9 \cos^2(\theta) - 5), \quad (5)$$

где $p_{l,\infty}$ — давление на бесконечности; θ — угол между осью z и радиус-вектором \mathbf{r} , соединяющим центр шара с точкой на его поверхности. Согласно [5] при числах Рейнольдса $Re \gg 24$ ($Re = \rho_l d U_z / \mu_l$, где d — диаметр шара; μ_l — вязкость жидкости) симметрия распределения (5) относительно направления движения разрушается, тогда как при $Re \ll 24$ преобладает вязкость, которая не учитывается при выводе (5), поэтому уравнение (5) можно переписать в виде:

$$p_l(\theta) = p_{l,\infty} + \frac{1}{2} \rho_l R \frac{dU}{dt} \cos(\theta) + \rho_l U^2 F(\theta), \quad (6)$$

где функция $F(\theta)$ определяется из эксперимента на основе соотношения

$$F(\theta) = \frac{1}{2} C_p(\theta),$$

где $C_p(\theta) = (p_l(\theta) - p_{l,\infty}) / (0,5 \rho_l U_z^2)$ — местный коэффициент давления при стационарном обтекании тела потоком жидкости, который в общем случае зависит от числа Re , формы пузырька, массообмена с поверхности пузырька и т. д.

Если осреднить (6) по поверхности шара, получим:

$$p_l = \langle p_l \rangle^s = p_{l,\infty} + \rho_l U^2 \langle F(\theta) \rangle^s,$$

где $C_s = \langle F(\theta) \rangle^s$, т. е. C_s — это осредненный коэффициент давления по поверхности шара. Если вместо шара рассматривать сферический газовый пузырек, то C_s — это осредненный коэффициент давления по межфазной поверхности, разделяющей жидкость и газ. В данном случае имеем:

$$\langle F(\theta) \rangle^s = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{-\pi}^{\pi} R^2 d\phi \int_0^{\pi} \sin(\theta) F(\theta) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin(\theta) C_p(\theta) d\theta. \quad (7)$$

В [4] C_s связывают с коэффициентом гидродинамического сопротивления C_d : $C_s = -0,37 C_d$ для $Re = 163\,000$. Однако коэффициент пропорциональности ($-0,37$) зависит от Re , так как C_s — это осредненная функция $F(\theta)$, а C_d — это осредненная функция $F(\theta)$ в проекции на направление движения.

Мы предлагаем рассчитывать C_s напрямую в зависимости от Re . Распределение местного коэффициента давления по поверхности твердой сферы для различных

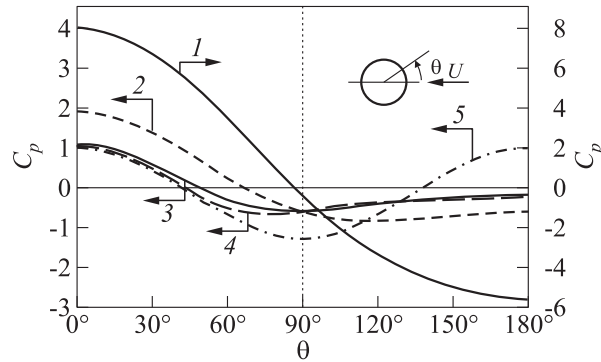


Рис. 2 Местный коэффициент давления для различных значений числа Re [6] (1 — Re = 1; 2 — 10; 3 — 100; 4 — Re = 400); 5 — потенциальное течение

чисел Re представлено в [6] (рис. 2), где $C_p(\theta)$ — результат численного моделирования. Подставив заданную функцию $C_p(\theta)$ в интеграл (7), получим: Re = 10 — $\langle F(\theta) \rangle^s = -0,1$; Re = 100 — $\langle F(\theta) \rangle^s = -0,12$; Re = 400 — $\langle F(\theta) \rangle^s = -0,15$; Re = 163 000 — $\langle F(\theta) \rangle^s = -0,15$.

При малых объемных газосодержаниях $\phi < 0,1$ при любых $Re \geq 10$ первое условие в (3) выполнено, так как $-C_s > \phi$; при $Re < 10$ преобладают вязкие члены и их необходимо учитывать в модели. При объемных газосодержаниях $\phi > 0,1$ необходимо учитывать коллективные эффекты. Для учета коллективных эффектов в [4] предложено использовать соотношение $C_s(\phi) = C_s(1 - \phi)^{-2,7}$. Если в задаче существуют области с $p_I < 0$, необходимо учитывать кавитацию.

Сравнение с экспериментом

Для проверки применимости модели к решению конкретных физических задач систему определяющих уравнений (1) с дополнительными соотношениями (2) решали численно методом конечных объемов со вторым порядком точности по времени и пространству. Численные потоки консервативных переменных рассчитывали через грани контрольного объема с помощью приближенного решения задачи Римана по методу HLL (Harten — Lax — van Leer) [7, 8]. Подробное описание алгоритма представлено в работе [9].

В качестве конкретной задачи рассмотрели задачу о распространении ударной волны в воде с пузырьками воздуха, которая решалась экспериментально в [10]. Эксперименты в [10] проведены в вертикальной гидроударной трубе постоянного прямоугольного сечения 50×100 мм длиной 1980 мм. Труба состояла из камеры высокого давления (КВД) длиной 495 мм, камеры низкого давления (КНД) длиной 495 мм, измерительной секции (ИС) длиной 990 мм, генератора пузырьков

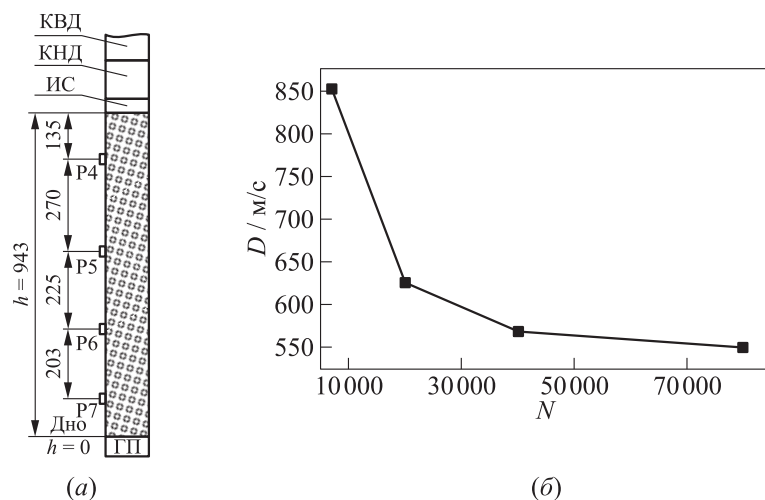


Рис. 3 Схема гидроударной трубы [10] (размерности указаны в миллиметрах) (а) и зависимость расчетной скорости ударной волны в воде с пузырьками воздуха на измерительном участке P4–P5 от разбиения сетки N при $\phi = 0,005$ (б)

(ГП) воздуха, системы подачи горючей смеси, системы регистрации экспериментальных данных, а также системы управления. На рис. 3, а представлена схема экспериментальной установки. Высокое давление в КВД (14,5 атм) получали за счет сжигания смеси пропана с воздухом, обогащенным кислородом до 30%. Камеру низкого давления заполняли воздухом при атмосферном давлении, а в ИС размещали столб воды с пузырьками воздуха со средним диаметром $d_0 = 2,5$ мм и начальным объемным газосодержанием ϕ от 0,005 до 0,3. Температура воздуха и воды была комнатной. Скорость ударной волны в пузырьковой жидкости определяли по записям датчиков давления как отношение расстояния между датчиками к интервалу времени между приходом волны на датчики.

Расчеты проводились при тех же условиях, что и эксперименты. Чтобы исключить сеточную зависимость результатов, расчеты проводились на сетках с разным разбиением N до тех пор, пока результаты переставали зависеть от количества узлов сетки. В качестве примера на рис. 3, б представлены результаты по сходимости численного решения задачи о скорости ударной волны в воде с пузырьками воздуха на первом измерительном участке (участок между датчиками P4 и P5 на рис. 3, а) при объемном газосодержании $\phi = 0,005$. Видно, что при $N = 40\,000$ результаты расчета практически перестают зависеть от сетки. Отметим, что для больших значений ϕ сходимость результатов достигалась на более крупных сетках.

На рис. 4 представлено сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными [10] по зависимостям скорости ударной волны на первом измерительном участке. Видно, что при $\phi \geq 0,02$ численные результаты удовлетворительно со-

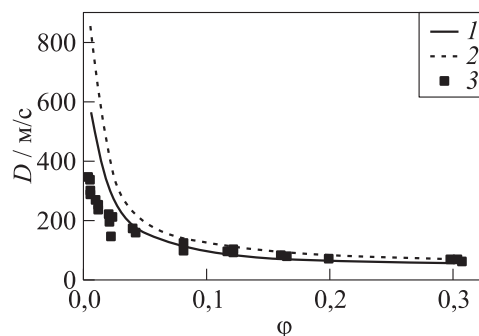


Рис. 4 Сравнение расчетных (1 — $N = 40\,000$; 2 — $N = 10\,000$) и измеренных [10] (3) зависимостей скорости ударной волны от объемного газосодержания пузырьковой жидкости на измерительном участке P4–P5

гласуются с экспериментальными данными (ошибка не превышает 20%), однако при $\varphi < 0,02$ данные расчета и эксперимента сильно расходятся. Расходимость результатов при низких газосодержаниях, по-видимому, связана с нарушением допущения о взаимно-проникающих континуумах в одномерной модели: при малых φ количество газовых пузырьков уменьшается и неоднородность их распределения по сечению и по высоте столба жидкости становится существенной.

Кроме скорости ударной волны в экспериментах [10] с помощью скоростной видеосъемки измеряли скорость контактной границы между воздухом и пузырьковой жидкостью и скорость отдельных воздушных пузырьков. Для проверки разработанной модели такие данные имеют большое значение, поскольку дополнительные слагаемые $p_I \nabla \phi$ в уравнениях сохранения количества движения в системе (1) не

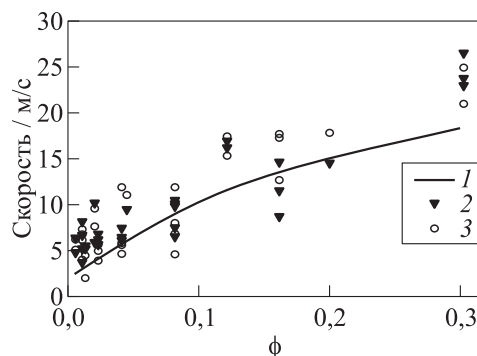


Рис. 5 Сравнение рассчитанной при $N = 10\,000$ зависимости (1) скорости межфазной границы от объемного газосодержания пузырьковой жидкости с измерениями: 2 — скорость межфазной границы; 3 — скорость пузырьков газа

вливают на распространение быстрых волн (например, волн давления), но могут оказывать значительное влияние на медленные волны (например, на передвижные контактные границы и дисперсных включений). На рис. 5 проведено сравнение результатов расчетов с измерениями [10] при разных значениях объемного газосодержания пузырьковой жидкости. Предложенная модель дает удовлетворительные результаты.

Заключение

Разработана корректная математическая модель неизотермического двухскоростного двухтемпературного двухфазного течения в системе «жидкость – пузырьки газа». Модель основана на двухфазных уравнениях Эйлера с введением добавочного давления у поверхности газового пузырька, которое обеспечивает корректность задачи Коши для системы определяющих уравнений с однородными начальными условиями. Добавочное давление определено через осредненный по поверхности раздела фаз местный коэффициент давления для различных чисел Рейнольдса относительного движения фаз. Получены условия применимости модели.

Модель проверена на одномерной задаче о распространении ударной волны в воде с пузырьками воздуха с объемным газосодержанием от 0,5% до 30% путем сравнения результатов расчетов с экспериментами. Показано, что модель дает удовлетворительные результаты по скорости распространения ударных волн и по скорости движения газовых пузырьков за ударными волнами в пузырьковой жидкости с объемным газосодержанием выше 2%. При меньших газосодержаниях данные расчета и эксперимента сильно расходятся. Расходимость результатов при низких газосодержаниях, по-видимому, связана с нарушением допущения о взаимно-проникающих континуумах в одномерной модели: при малых газосодержаниях количество газовых пузырьков уменьшается и неоднородность их распределения по сечению и по высоте столба жидкости становится существенной.

Литература

1. *Радвогин Ю. Б.* Негиперболичность уравнений двухфазной среды и неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. — М.: ИПМ, 1995. Препринт № 125.
2. *Radvugin Yu. B., Posvyanskii V. S., Frolov S. M.* Stability of 2D two-phase reactive flows // *J. Phys. IV France* 12, 2002. Vol. 12. P. 437–444.
3. *Нугматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. — М.: Наука, 1987. 464 с.
4. *Stuhmiller J. H.* The influence of interfacial pressure forces on the character of two-phase flow model equations // *Int. J. Multiphas. Flow*, 1977. Vol. 3. No. 6. P. 551–560.
5. *Lamb H.* *Hydrodynamics*. — Cambridge University Press, 1932. 864 p.
6. *Clift R., Grace J. R., Weber M. E.* *Bubbles, drops, and particles*. — Courier Corp., 2005. 381 p.
7. *Harten A., Lax P. D., van Leer B.* On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // *SIAM Rev.*, 1983. Vol. 25. P. 35–61.

8. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001. 607 с.
9. Yeom G., Chang K. Numerical simulation of two-fluid two-phase flows by HLL scheme using an approximate Jacobian matrix // Numer. Heat Tr. B — Fund., 2006. Vol. 49.2. P. 155–177.
10. Авдеев К. А., Аксенов В. С., Борисов А. А., Тухватуллина Р. Р., Фролов С. М., Фролов Ф. С. Численное моделирование воздействия ударной волны на пузырьковую среду // Горение и взрыв, 2015. Т. 8. № 2. С. 45–56.

Поступила в редакцию 18.12.15

WELL-POSEDNESS OF NONISOTHERMAL EULER MODELS OF TWO-PHASE FLOWS

R. R. Tukhvatullina¹ and S. M. Frolov^{1,2,3}

¹Noncommercial Partnership Center of Pulse Detonation Combustion, 4 Kosygin Str., Moscow 119991, Russian Federation

²N. N. Semenov Institute of Chemical Physics, Russian Academy of Sciences, 4 Kosygin Str., Moscow 119991, Russian Federation

³National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), 31 Kashirskoe Sh., Moscow 115409, Russian Federation

Abstract: A well-posed mathematical model of nonisothermal two-velocity two-temperature two-phase flow of bubbly liquid has been proposed. The model is based on two-phase Euler equations with the introduction of an additional pressure at the gas bubble surface, which ensures the well-posedness of the Cauchy problem for a system of governing equations with homogeneous initial conditions. The additional pressure is obtained using the local pressure coefficient averaged over the phase interface for different Reynolds numbers of relative motion of phases. The applicability conditions of the model have been formulated. The model has been validated for a one-dimensional problem of shock wave propagation in water with air bubbles with a volume gas content of 0.5% to 30% by comparing the calculation results with the experimental data. It has been shown that the model provides satisfactory results for the shock propagation velocity and the shock-induced motion of gas bubbles in bubbly liquid at volume gas content above 2%.

Keywords: two-phase flow; Euler equations; Cauchy problem; bubbly liquid; shock wave; comparison with experiment

Acknowledgments

The work was supported by the Russian Ministry of Education under the state contract No. 14.609.21.0001 (contract ID RFMEFI57914X0038) “Development of technology for the creation of hydrojet thrust in high-speed vehicles and the establishment of stand

demonstrator of hydrojet pulse-detonation engine” in the framework of the Federal Target Program “Research and development in priority areas of Russian scientific and technological complex for 2014–2020.”

References

1. Radvugin, Yu. B. 1995. *Negiperbolichnost' uravneniy dvukhfaznoy sredy i neustoychivost' Kel'vina–Gel'mgol'tsa* [Nonhyperbolicity of the two-phase flow equations and Kelvin–Helmholtz instability]. Moscow: IPM. Preprint No. 125.
2. Radvugin, Yu. B., V. S. Posvyanskii, and S. M. Frolov. 2002. Stability of 2D two-phase reactive flows. *J. Phys. IV France* 12:437–444.
3. Nigmatulin, R. I. 1987. *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Moskva: Nauka. Part 1. 464 p.
4. Stuhmiller, J. H. 1977. The influence of interfacial pressure forces on the character of two-phase flow model equations *Int. J. Multiphas. Flow* 3(6):551–560.
5. Lamb, H. 1932. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press. 864 p.
6. Clift, R., J. R. Grace, and M. E. Weber. 2005. *Bubbles, drops, and particles*. Courier Corp. 381 p.
7. Harten, A., P. D. Lax, and B. van Leer. 1983. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Rev.* 25:35–61.
8. Kulikovskii, A. G., N. V. Pogorelov, and A. Yu. Semenov. 2001. *Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy* [Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems of equations]. Moscow: Fizmatlit. 607 p.
9. Yeom, G., and K. Chang. 2006. Numerical simulation of two-fluid two-phase flows by HLL scheme using an approximate Jacobian matrix. *Numer. Heat Tr. B — Fund.* 49.2:155–177.
10. Avdeev, K. A., V. S. Aksenov, A. A. Borisov, R. R. Tukhvatullina, S. M. Frolov, and F. S. Frolov. 2015. Chislennoe modelirovanie vozdeystviya udarnoy volny na puzyr'kovuyu sredu [Numerical simulation of the impact of shock wave on bubbly liquid]. *Goren. Vzryv (Mosk.) — Combustion and Explosion* 8(2):42–56.

Received December 18, 2015

Contributors

Tukhvatullina Ruzana R. (b. 1988) — research engineer, Noncommercial Partnership Center of Pulse Detonation Combustion, 4 Kosygin Str., Moscow 119991, Russian Federation; tukhvatullinarr@gmail.com

Frolov Sergey M. (b. 1959) — Doctor of Science in physics and mathematics, head of department, N. N. Semenov Institute of Chemical Physics, Russian Academy of Sciences, 4 Kosygin Str., Moscow 119991, Russian Federation; scientific head, Noncommercial Partnership Center of Pulse Detonation Combustion, 4 Kosygin Str., Moscow 119991, Russian Federation; professor, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), 31 Kashirskoe Sh., Moscow 115409, Russian Federation; smfrol@chph.ras.ru